UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS:

Uma proposta de atividade para o Ensino Fundamental

Telia Mara Lopes da Rosa

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil
Abril de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DIOFANTINAS:

Uma proposta de atividade para o Ensino Fundamental

Telia Mara Lopes da Rosa

Trabalho submetido por Telia Mara Lopes da Rosa como requisito parcial para a conclusão do curso em Licenciatura Matemática junto ao Instituto de Matemática, Física e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande.

Orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Daiane Silva de Freitas

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Abril de 2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE – FURG
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA – IMEF
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Telia Mara Lopes da Rosa

EQUAÇÕES DIOFANTINAS:

Uma proposta de atividade para o Ensino Fundamental

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª Drª Daiane Silva de Freitas - FURG

Profª. Drª Luciele Rodrigues Nunes – FURG

Prof. Dr. Eneilson Campos Fontes – FURG

Abril de 2022

AGRADECIMENTOS

Ao Nosso Pai Maior em primeiro lugar, que deu-me saúde e por me abençoar e proteger todos os dias, fortalecendo-me para superar todos obstáculos e alcançar meu objetivo.

À minha amada mãe, Terezinha Branco Lopes, que, mesmo em outro plano, sempre amparou-me e mostrou-me o caminho certo a seguir. Essa vitória é totalmente dedicada a ela. Que esteja em paz e com muito orgulho da filha que cumpriu a promessa. Tenho certeza que está comemorando e muito feliz com minha vitória. Amor além da vida.

Ao meu filho, Thales Lopes da Rosa, que sempre me incentivou, apoiou e acreditou que eu conseguiria. Te amo, filho.

Às minhas queridas amigas, Ione Motta Leal, Angélica Coutinho e Margarete Braga, que sempre me apoiaram, me puxaram a orelha cada vez que dizia que iria desistir, aguentaram minhas crises, minhas lágrimas, sempre me incentivando a continuar e, acima de tudo, acreditaram no meu potencial.

Agradecer a minha querida psicóloga, Andreia Fernandes, que durante os dois últimos anos, acompanhou minha trajetória, ajudou-me a superar as inúmeras crises, aguentou meus choros, minhas revoltas, mas acima de tudo, mostrou-me que sou capaz de vencer a depressão e as crises de ansiedade e conquistar todos meus objetivos.

Ao querido Mestre Luiz Augusto Andreoli de Moraes, por ter tido a honra de ser sua aluna e, principalmente ter sua amizade e apoio em momentos cruciais em minha trajetória na Furg. Que esteja em paz em seu novo lar.

Agradecer, muito especialmente, à Profª Drª Daiane Silva de Freitas, que aceitou orientar-me nesse trabalho. Não tenho palavras para agradecer todo seu apoio, incentivo, puxões de orelha, paciência, disponibilidade em me atender, enfim todo trabalho que realizou comigo para que realizasse um bom trabalho.

Aos professores que aceitaram participar da banca de avaliação, Profª Drª Luciele Rodrigues Nunes e Prof. Dr. Eneilson Campos Fontes. Suas dicas, sugestões, disponibilidade foram muito importantes e, não só acrescentaram, mas enriqueceram meu trabalho.

Meu muito obrigada à todos, de coração. Ficarão marcados para sempre em minha vida como exemplos de pessoas e professores.

“O que eu queria era sentar em volta do fogo com todo o grupo e esperar o momento que a conversa começasse a fluir, esperar aquela fala que vem lá do coração e tantas vezes umedece o olho de repente, ia esperar que os pactos pudessem ser firmados à luz de todo o céu, com o céu e todos por testemunha.”

Luiz Augusto Andreoli de Moraes

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade discutir o estudo das Equações Diofantinas nas séries finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. Salientamos que embora não explicitamente, esse tipo de equações já são estudadas no ensino básico, por exemplo, no aprendizado de divisibilidade, fatoração, divisão Euclidiana, cálculo do máximo divisor comum, equações de primeiro grau e sistemas de equações de primeiro grau com duas variáveis. Com este trabalho, pretendemos, ao introduzir o estudo das Equações Diofantinas, desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo-se aos conhecimentos matemáticos, para compreender e solucionar situações-problemas contextualizadas ao cotidiano dos educandos.

PALAVRAS-CHAVE

Equações Diofantinas; Ensino Fundamental, Ensino Médio.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência instigante e desafiadora, e por assim ser, àqueles que se dedicam ao seu estudo sentem-se desafiados a encontrar novos métodos de ensino e consequentemente soluções de problemas, contextualizando-os ao cotidiano dos educandos.

Neste trabalho, apresentamos a utilização das Equações Diofantinas e suas soluções tanto nas séries finais do Ensino Fundamental, como do Ensino Médio. Os conteúdos necessários para a solução dessas equações são estudados a partir do quinto ano do Ensino Fundamental, onde os alunos agregam conhecimentos de divisibilidade, fatoração, máximo divisor comum, conjuntos numéricos. As Equações Diofantinas são apresentadas através de exemplos lúdicos e didáticos que estimulam o prazer de estudar matemática.

Cabe salientar que, embora não explicitamente, as Equações Diofantinas já fazem parte tanto do Ensino Fundamental como quanto do Ensino Médio, pois são expostas através de problemas contextualizados que requerem o uso de equações com duas variáveis para sua solução. Mesmo àqueles que nunca ouviram o termo ‘Equações Diofantinas’, inconscientemente as conhecem, e as resolvem, normalmente por experimentação ou ‘tentativas e erro’- em situações de vida comuns transcritas em linguagem matemática.

Por tratar-se de um conteúdo muito extenso e interessante, seu estudo e análise, proporcionam uma grande ferramenta no auxílio de resolução dos mais diversos problemas. Desenvolvendo a interpretação algébrica, pode-se comparar e estabelecer estratégias de pensamento de forma criativa para resolver problemas em outras áreas de conhecimento. Além disso propicia o desenvolvimento do raciocínio lógico, conciliando a interpretação de problemas juntamente com as referidas resoluções e cálculos.

Salientamos que nosso trabalho está focado no Ensino Fundamental, porém falamos sobre seu ensino no Ensino Médio, baseados na leitura da dissertação de Savóis (2014). O mesmo justifica a inserção do ensino das Equações Diofantinas no Ensino Médio afirmando que, nesse período, os alunos apresentam um maior discernimento para debates sobre os conteúdos estudados e suas aplicações.

Portanto, não estamos, aqui, incluindo um novo conteúdo ao currículo, apenas justificando que, mesmo não estando explicitadas, as mesmas já estão presentes no Ensino Fundamental e Médio, e são usadas como um material adequado para a formação do conteúdo didático em todas as séries, porém sem nunca se destacarem nem terem seu conceito definido integralmente.

No primeiro capítulo, apresentamos um breve relato sobre Diofanto de Alexandria, autor do tema deste trabalho e sua obra mais importante “Arithmética”, explicitando alguns dos problemas contidos nos exemplares remanescentes de sua obra. No segundo capítulo, trazemos o referencial teórico, onde explicitamos nossas pesquisas e estudos para a realização desse trabalho. No terceiro capítulo, trazemos uma revisão da Teoria dos Números, com o objetivo de apresentar conhecimentos básicos da Teoria Elementar dos Números necessários para o estudo das Equações Diofantinas. No quarto capítulo, apresentamos o estudo das Equações Diofantinas.. No quinto capítulo, trazemos uma proposta de atividades a serem aplicadas à alunos do 9º do Ensino Fundamental, na qual justificamos a afirmação de que as Equações Diofantinas estão inseridas no currículo das séries finais no Ensino Fundamental

1. OBJETIVOS

Objetivo Geral

Através desse trabalho, queremos analisar a possibilidade da introdução do estudo de Equações Diofantinas a partir das séries finais do Ensino Fundamental.

Objetivos Específicos

1. Revisar os conteúdos que precedem o estudo das Equações Diofantinas.

2, Ver uma aplicação das Equações Diofantinas no Ensino Fundamental.

2. METODOLOGIA

Para a realização de nosso trabalho, foi utilizado o método de pesquisas descritivas com a finalidade de justificar nossa afirmação de que o estudo das Equações Diofantinas estão incluídas no currículo das séries finais do Ensino Fundamental.

Para tanto, foram realizadas leituras de dissertações e trabalhos de conclusão do curso de Matemática Licenciatura, os quais foram feitos com conteúdos pertinentes ao nosso trabalho. Cabe salientar que, essas leituras muito nos enriqueceram, ampliando nossos conhecimentos e trouxeram novas visões e perspectivas para a justificativa de nosso trabalho.

Também foram feitas leituras de autores, como Howard Eves e Carl B. Boyer, que nos auxiliaram no conteúdo histórico do trabalho. Através desses autores, podemos fazer um relato da biografia do matemático grego Diofanto, autor das Equações Diofantinas, objeto de estudo de nosso trabalho, e, apresentar suas obras, tendo "*Arithmética*", um maior destaque por ser a fonte principal do estudos das equações de Diofanto.

Destacamos, também, que as leituras das dissertações foram muito apropriadas na elaboração das atividades aqui propostas, pois ampliaram o leque de informações pesquisadas anteriormente. Todas atividades pesquisadas, nos trouxeram a importância da contextualização dessas equações ao cotidiano dos educandos, fazendo com que tornasse nossa proposta de atividades mais inerente ao objetivo desse trabalho.

Mediante todas pesquisas realizadas, acreditamos ter obtido informações, não só que justifiquem nosso trabalho, mas que confirmam nosso objetivo, comprovar que o estudo das Equações Diofantinas já está inserido no currículo das séries finais do Ensino Fundamental.

3.BREVE RELATO DA HISTÓRIA

Neste capítulo, trazemos um breve relato da vida de Diofanto, autor do tema de nosso trabalho, além de apresentarmos suas obras, dando ênfase à "Arithmética", sua principal obra.

3.1. Diofanto de Alexandria

No período conhecido como "Segunda Idade Alexandrina", ou século da "Idade da Prata", de 250 à 350D.C., aproximadamente, surgiu o matemático Diofanto de Alexandria, frequentemente chamado de "Pai da Álgebra", por sua grande influência sobre os europeus que posteriormente se dedicaram à Teoria dos Números, como menciona Carl B. Boyer (1996). Porém, como veremos mais adiante, esse título não deve ser tomado literalmente.

Considerado como um dos maiores algebristas gregos, nada se sabe com certeza acerca de sua nacionalidade e da época em que viveu. A maioria dos historiadores tende a situá-lo no século III de nossa era, e sua carreira floresceu em Alexandria. Nenhuma outra cidade foi o centro de atividade matemática por tanto tempo quanto Alexandria. Era um centro muito cosmopolita, e a matemática que dali se originou não era toda do mesmo tipo, e na obra de Diofanto há uma abrupta quebra da tradição clássica grega.

Pouco se sabe sobre sua vida e em seu túmulo foram encontrados versos com problemas enigmáticos pelos quais deduz-se que viveu 84 anos. Segundo dizem, esse enigma teria sido gravado por seu amigo, Metrodorus, cujo resultado revela a idade de Diofanto.

> Deus lhe concedeu ser menino pela sexta parte de sua vida, e somando sua duodécima parte a isso, cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz criança; depois de viver a metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números, ele terminou sua vida. (Cohen e Drabkin, 1958, p.27)

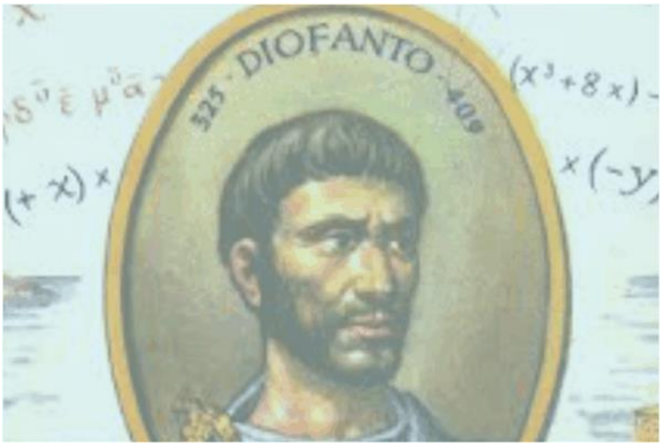
Outra forma de enunciar este enigma é: "Diofanto passou 1/6 de sua vida como criança, 1/12 como adolescente e mais 1/7 na condição de solteiro. Cinco anos depois de se casar nasceu-lhe um filho que morreu 4 anos antes de seu pai, com metade da idade (final) de seu pai".

A equação que resolve tal enigma será:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$$

Considerando-se a veracidade de tal enigma, concluímos que Diofanto viveu por 84 anos, mas não deve ser tomado como um problema típico dos que interessavam ao matemático, pois este pouca atenção deu às equações do primeiro grau.

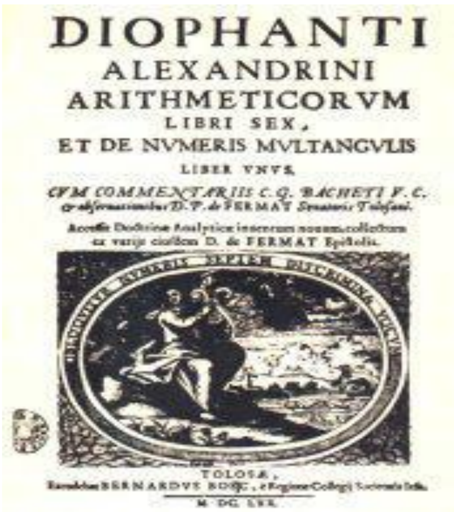
Figura 1: Imagem de Diofanto adulto com um escrito de um epitáfio em seu túmulo.



Fonte: https://www.ticsnamatematica.com/2013/08/o-epitafio-de-diofante.html

3.2 A obra "Arithmética"

Figura 2. Capa do Livro *Aritmética*


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
TOLOSÆ,
M. DC. LXX.

Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/b_diofanto-de-alexandria/

Diofanto escreveu três trabalhos: “Arithmética”, o mais importante, tratado que era originalmente em treze livros, mas somente os seis primeiros foram preservados; “Sobre Números Poligoniais” do qual restou apenas um fragmento e “Porismas”, que se perdeu.

A “Arithmética” teve muitos comentadores históricos, mas a primeira voz a pedir uma tradução do grego foi Regiomontanus, em 1463, ao descobrir em Pádua um exemplar da obra. Uma outra tradução, com muitos comentários e méritos, foi feita em 1575 por Xilander (nome grego adotado pelo professor da Universidade de Heidelberg, Wilhelm Holzmann). Essa mesma tradução, foi usada pelo francês Bachet de Méziriac, em 1621, que publicou a primeira edição do texto em grego juntamente com uma tradução latina acompanhada de notas. Uma segunda edição apareceu em 1670, impressa de maneira negligente, mas apesar disso, é historicamente importante por conter as famosas notas marginais de Fermat que tanto estimularam as pesquisas em teoria dos números. Mais tarde apareceram traduções para o francês, alemão e inglês.

Como menciona Howard Eves (1997), a “Arithmética” de Diofanto era algo muito diferente das obras até então conhecidas, era um tratado caracterizado por um alto grau de habilidade matemática e de engenho, visto assim, o livro pode ser comparado aos grandes clássicos da Idade Alexandrina, porém quase nada tem em comum com esses, ou com qualquer matemática grega tradicional. Desvinculado dos métodos algébricos, representa um novo ramo e usa métodos diferentes, assemelhando-se à álgebra babilônica em muitos aspectos. Mas enquanto os matemáticos babilônicos ocupavam-se com soluções aproximadas de equações determinadas de até terceiro grau, a obra de Diofanto é quase toda dedicada à resolução exata de equações tanto determinadas quanto indeterminadas. Com a ênfase dada à solução de problemas indeterminados, o tema, chamado análise indeterminada, tornou-se conhecido como análise diofantina. Atualmente, esse trabalho é geralmente parte de cursos de teoria dos números e não da álgebra elementar , e não é considerada base adequada para chamar Diofanto de “Pai da Álgebra”, mas, por outro lado, a paternidade se justifica, pois hoje a álgebra baseia-se quase que exclusivamente, em formas simbólicas de enunciados, em lugar da linguagem usual da comunicação em que a matemática grega anterior, bem como a literatura grega, se expressavam.

A “Arithmética” é uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo. Não é uma exposição sistemática sobre operações, funções ou resolução de equações algébricas, mas uma coleção de cerca de 150 problemas, estudados em termos de exemplos numéricos específicos, apesar de pretender conseguir generalidade de método. Não há desenvolvimento postulacional, nem procura de todas as soluções possíveis. É notável a falta de métodos gerais e a aplicação repetida de artifícios engenhosos planejados para as necessidades de cada problema específico. Diofanto só admitia respostas entre os números inteiros (ou racionais) positivos e, na maioria, satisfazia-se com apenas uma resposta para o problema. Resolvia problemas envolvendo vários números desconhecidos expressando engenhosamente todas as quantidades desconhecidas, quando possível, em termos de apenas uma.

Para ilustrar o método diofantino, apresentamos dois problemas do livro “Arithmética” como exemplos:

Problema 1: Achar dois números tais que sua soma seja 20 e a soma dos quadrados seja 208.

Solução: Denominando-se os números desconhecidos como $10+ x$ e $10- x$, tem-se, $(10 + x)^2 + (10 – x)^2 = 208$, logo $x=2$. Então os números procurados são 8 e 12.

Problema 2: Analogamente, tem-se que a soma dos dois números e a soma dos cubos são 10 e 370, respectivamente.

Nos exemplos acima, Diofanto lida com equações determinadas, mas usou essencialmente o mesmo esquema na análise indeterminada. Um problema pede que sejam encontrados dois números tais que cada um somado com o quadrado do outro forneça um quadrado perfeito. Este é um exemplo típico de análise Diofantina onde somente números racionais positivos são admissíveis como resposta. Temos, portanto, um esquema que chega perto de ser um "método" na obra de Diofanto: quando duas condições devem ser satisfeitas por dois números, eles são escolhidos de modo a satisfazer a uma das duas condições; e então, resolve-se o problema de satisfazer à segunda, isto é, no lugar de resolver equações simultâneas sobre duas incógnitas, Diofanto opera com condições sucessivas de maneira que apareça um só número desconhecido.

Dos livros preservados da obra "Arithmética", possuímos as seguintes informações:

Livro I: contém 39 problemas, sendo que 25 envolvem equações de 1º grau e 14 são problemas de 2º grau.

Livro II: contém 35 problemas, sendo o problema número 8 o mais famoso.

Livro III: contém 21 problemas, no qual encontramos no problema número 19 o uso da geometria para encontrar sua solução.

Livro IV: contém 40 problemas, todos tratando dos números cúbicos.

Livro V: contém 30 problemas, sendo 28 de equações de 2º e 3º graus.

Livro VI: contém 24 problemas, neste encontramos resoluções de problemas com triângulos retângulos com lados racionais.

Segundo Roque (2012) a contribuição mais conhecida de Diofanto é ter introduzido uma forma de representar o valor desconhecido em um problema, designando-o como *arithmos*, de onde vem o nome "aritmética".

3.3 Problemas do Livro "Arithmética"

Trazemos aqui outros problemas apresentados nos livros da obra "Arithmética" de Diofantus.

Livro I, Problema 1: Dividir um número dado em dois números de diferença dada.

Solução proposta por Diofanto: Seja 100 o número e a diferença 40; achar os números. Supondo *arithmo* o número menor, o maior será *arithmo* mais 40; logo, os dois somados dão 2 *arithmos* mais 40, que vale 100. Então, 100 é igual a 2 *arithmos* mais 40. Em seguida vamos subtrair 40 a cada um dos membros ficando 2 *arithmos* igual a 60. Logo o número será 30. Então, *arithmo* igual a 30 e *arithmo* mais 40 igual a 70.

Livro II, Problema 8: Decompor o quadrado 16 em dois quadrados.

Solução proposta por Diofanto: Se quisermos decompor 16 em dois quadrados e supusermos que o primeiro é 1 *arithmo*, o outro terá 16 unidades menos um quadrado de *arithmos* e, portanto, 16 unidades menos um quadrado de *arithmos* são um quadrado. Formemos um quadrado de um conjunto qualquer de *arithmos* diminuído de tantas unidades como tem a raiz de 16 unidades, ou seja, o quadrado de 2 *arithmos* menos 4 unidades. Este quadrado terá 4 unidades de *arithmos* e 16 unidades menos 16 *arithmos*, que igualaremos a 16 unidades menos um quadrado de *arithmo* e somando a um e outro lado os termos negativos e restando os semelhantes, resulta que 5 quadrados de *arithmos* equivalem a 16 *arithmos* e, portanto, 1 *arithmo* vale $\frac{16}{5}$; logo, um dos números é $\frac{256}{25}$ e o outro $\frac{144}{25}$, cuja soma é $\frac{400}{25}$, ou seja 16 unidades, e cada um deles é um quadrado.

4. REFERENCIAL TEÓRICO

Para a realização deste trabalho, foram feitas pesquisas e leituras de dissertações que versam sobre o assunto, e também alguns trabalhos de conclusão do curso de Matemática Licenciatura. Embora tratem-se de dissertações de mestrado, as mesmas trouxeram conhecimentos e aplicações das Equações Diofantinas que foram usados em nosso trabalho, cada uma com sua peculiaridade, mas todas tendo como base a história de Diofantus, considerado o maior algebrista grego, e a exposição dos conteúdos necessários para a resolução dessas equações, bem como exemplos e aplicações.

De acordo com Ribeiro (2014), o qual afirma em sua dissertação, o estudo das equações diofantinas desde o Ensino Médio é possível, pois os mesmos já trazem uma bagagem de conhecimentos necessários para a resolução dessas equações desde o Ensino Fundamental. Esses conhecimentos são apenas reforçados ou um pouco mais aprofundados, onde o uso da fatoração e de parâmetros permite a resolução das equações, possibilitando, ainda não só a solução particular, mas também a solução geral. Além disso, traz uma preparação em especial para as olimpíadas de Matemática, o que abre um campo maior de conhecimento e aprendizado, como explicitado em suas sequências didáticas propostas à professores interessados em ampliar o estudo de seus educandos em relação a esse conteúdo.

Por outro lado, há também a possibilidade de trabalhar com Equações Diofantinas associando-as às funções aritméticas (Duarte, 2020), e também no estudo da solução das mesmas em outros conjuntos numéricos, como o conjunto dos números racionais (Savóis, 2014), o que torna ainda mais amplo o conteúdo, já que o mesmo é limitado ao conjunto dos números inteiros.

O estudo das Equações Diofantinas é de suma importância, pois reúne grande parte do estudo da Teoria dos Números, que envolvem desde o conhecimento de divisibilidade, fatoração, entre outros, até a lógica matemática, que é o desenvolvimento do raciocínio matemático sem fórmulas ou pré-requisitos por tratar-se exclusivamente do ato de pensar matemática.

Todas as leituras feitas e estudadas, trouxeram novas perspectivas para nosso trabalho, ampliando, não só nossos conhecimentos, mas também causando uma certa provocação em aprimorar nossas ideias, além da contextualização, já pensada, trazendo problemas do cotidiano dos alunos para serem solucionados através das equações diofantinas.

Salientamos, aqui, que segundo a BNCC, os estudantes do Ensino Fundamental Séries Finais estão inseridos em uma faixa etária onde possuem maior capacidade de desenvolver suas habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. Essas habilidades favorecem o estabelecimento de conjecturas, formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. Nessa fase, o estudante possui maiores habilidades em ver nos problemas matemáticos, não só números e soluções a serem encontradas, mas em trazer esses problemas para sua vida, através de situações problemas que versam sobre o dia-dia de todos, de sua comunidade tanto escolar quanto social, o que fazem amadurecer seu raciocínio lógico, preparando-os para a fase seguinte de seu aprendizado, o Ensino Médio.

Nessa última fase de aprendizado contemplado pela BNCC, os estudantes resignificam todo seu aprendizado adquirido até aqui, agregando novos conhecimentos o que amplia o leque de recursos para soluções de problemas mais complexos.

> “1.Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
>
> 2. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.” (BNCC, pág 269)

Portanto, o estudo das Equações Diofantinas nas séries finais do Ensino Fundamental, também está contemplado na BNCC, mesmo não explicitamente, pois, nosso objetivo com esse trabalho, é mostrar que todos conteúdos necessários para o estudo desse tipo de equações estão inseridos na BNCC, e são adquiridos pelos estudantes, tornando-os capazes de solucionarem essas equações.

5. FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

A Teoria dos Números é o ramo da Matemática Pura que dedica-se ao estudo das propriedades dos números, mais particularmente dos números inteiros. Neste capítulo, trazemos definições, teoremas, proposições, demonstrações e exemplos de alguns tópicos da Teoria dos Números que são necessários para o estudo das Equações Diofantinas.

5.1. PRINCÍPIO DA BOA ORDEM

Um conjunto de números está bem ordenado quando cada um de seus subconjuntos não vazios tem um elemento mínimo.

Seja $\boldsymbol{S}$ um subconjunto de $\mathbb{N}$. Dizemos que um número natural a é um menor elemento de $\boldsymbol{S}$ se possui as seguintes propriedades:

i) $a \in \boldsymbol{S}$,
ii) $\forall n \in \boldsymbol{S}$; $a \leq n$.

Observamos que se $\boldsymbol{S}$ possui um menor elemento, então ele é único. De fato, se a e a' são os menores elementos de $\boldsymbol{S}$, então $a \leq a'$ e $a' \leq a$, o que implica que, $a = a'$ (propriedade anti-simétrica da relação de ordem).

Teorema (*Princípio da Boa Ordem*) Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Demonstração: Seja $\boldsymbol{S}$ um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e suponha, por absurdo, que $\boldsymbol{S}$ não possui um menor elemento.

Considere o conjunto $\boldsymbol{T}$, complementar de $\boldsymbol{S}$ em $\mathbb{N}$. Queremos, portanto, mostrar que $\boldsymbol{T} = \mathbb{N}$.
Seja o conjunto

$$\boldsymbol{I_n} = \{ k \in \mathbb{N} : k \leq n\}.$$

e considere a sentença aberta

$$\boldsymbol{p}(n) : \boldsymbol{I_n} \subset \mathbf{T}.$$

Como $1 \leq n$ para todo n, segue-se que $1 \in \mathbf{T}$, pois, caso contrário, 1 seria um menor elemento de $\boldsymbol{S}$.

Logo, $\boldsymbol{p}(1)$ é verdadeira.

Suponhamos agora que $\boldsymbol{p}(n)$ seja verdadeira. Se $n+1 \in \boldsymbol{S}$, como nenhum elemento de $\boldsymbol{I_n}$ está em $\boldsymbol{S}$, teríamos que $n+1$ é um menor elemento de $\boldsymbol{S}$, o que não é permitido.

Logo, $n + 1 \in \mathbf{T}$, seguindo então que:

$$\boldsymbol{I_{n+1}} = \boldsymbol{I_n} \cup \{n + 1\} \subset \mathbf{T}.$$

o que prova que $\forall n$; $\boldsymbol{I_n} \subset \mathbf{T}$.

Portanto, $\mathbb{N} \subset \mathbf{T} \subset \mathbb{N}$ e consequentemente, $\mathbf{T} = \mathbb{N}$.

□

Exemplo 1. Seja $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{N};\ x$ é um número ímpar$\}$. Este conjunto é um subconjunto não vazio dos números naturais. Pelo *Princípio da Boa Ordenação*, **P** contém um elemento mínimo. Neste caso, o elemento mínimo em **P** é 1.

5.2. DIVISIBILIDADE

A divisão de um número inteiro por outro nem sempre é exata, e expressamos esta possibilidade através da relação de divisibilidade. Se não existir uma relação de divisibilidade entre dois números, ainda assim será possível efetuar uma "divisão com resto", chamada de divisão euclidiana, como veremos na próxima seção.

Definição: Dados dois números inteiros a e b, com $a \neq 0$, dizemos que a divide b, e escrevemos $a \mid b$, se existir um número inteiro k tal que $b = ka$. Caso a não divida b, escrevemos $a \nmid b$. Se a dividir b, dizemos que a é um divisor de b, ou que b é divisível por a, ou ainda que b é um múltiplo de a.

Observação: Todo número inteiro não nulo é um divisor de si mesmo e de 0.

Exemplo: $6|18$, pois existe um inteiro $k = 3$ tal que $18 = 6\text{x}3$.

Exemplo: $6 \nmid 15$, pois não existe um inteiro k tal que $15 = 6k$.

Proposição (*Propriedades de Divisibilidade*) :

Sejam a, b e $c \in \mathbb{Z}$, e x, y inteiros quaisquer. Então:

(a) Se $b|\ a$ e $a|\ b$, então $a = \pm\ b$.

(b) Se $c|\ b$ e $b|\ a$, então $c|\ a$.

(c) Se $c|\ a$ e $c|\ b$, então $c|\ (ax + by)$.

(d) Se $b|\ a$, então $|b| \leq |a|$.

(e) Se $c|\ b$, então $c|\ ab$.

(f) Se $b|\ a$, então $bc|\ ac$.

Demonstração:

(a) Se a' e b' são inteiros tais que $a=ba'$ e $b=ab'$ então $a=ba'=(ab')a'= a(a'b')$ e assim, a'b'= 1. Logo, a'= $\pm$ 1, donde segue que $a = \pm b$.

(b) Se $a= bc'$ e $b = cb'$, com a' ,$b' \in \mathbb{Z}$, então $a=ba'=(cb')a'=c(a'b')$ com $a'b' \in \mathbb{Z}$. Logo $c|a$.

(c) Sejam $a=cd$ e $b= cb'$, com d, $b \in \mathbb{Z}$. Então $ax+ by= cdx + cb'y = c(dx + b'y)$ com $dx + b'y \in$ Z. Logo $c|(ax + by)$.

(d) Como $a\neq 0$ e $b|a$, temos que $a= ba'$, com $a' \in \mathbb{Z}$ e $a' \neq 0$. Assim $|a| \geq 1$, então $|a| = |ba'| = |b|\ |a| \geq |b|$.

(e) Se $b = cb'$, com $b' \in \mathbb{Z}$, então $ab = a\ (cb') = c\ (ab')$, com $ab' \in \mathbb{Z}$. Logo, $c|\ ab$.

(f) Se $a= bc'$, com $a' \in \mathbb{Z}$, então $ac= (ba')\ c = (bc)\ a'$ e, assim, $bc|\ ac$.

□

5.3. DIVISÃO EUCLIDIANA

Sejam a e b números inteiros, b diferente de zero. Trazemos a seguir um importante resultado, que garante que sempre é possível efetuar a divisão do número inteiro a pelo número b.

Teorema: Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que:

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração:

Seja o conjunto:

$$\boldsymbol{S}= \{x = a - by: y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Existência: Pela Propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\ (-b) > -a$, logo $a-nb > 0$, o que mostra que $\boldsymbol{S}$ não é vazio. O conjunto $\boldsymbol{S}$ é limitado inferiormente por 0, portanto, pelo *Princípio da Boa Ordem*, temos que $\boldsymbol{S}$ possui um menor elemento r. Suponhamos que

$$r = a - bq.$$

Sabemos que $r \geq 0$. Vamos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos, por absurdo, que $r \geq |b|$. Logo, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, assim $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de $\boldsymbol{S}$, pois $s = a - (q \pm 1)\ b \in \boldsymbol{S}$, com $s < r$.

Unicidade: Suponhamos que $a= bq + r = bq' + r'$, onde $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$.

Assim, temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Portanto, $|r - r'| < |b|$. Por outro lado,

$$b(q - q') = r' - r,$$

o que implica que:

$$|b|\,|q - q'| = |r' - r| < |b|.$$

O que só é possível se $q = q'$ e, consequentemente, $r = r'$.

□

De acordo com o teorema acima, os números q e r são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de a por b.

Da divisão Euclidiana, temos que o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, b divide a.

Exemplo: Na divisão de 25 por 3, o quociente e o resto são $q = 8$ e $r = 1$, pois 25=3x8+1.

Exemplo: Na divisão de 46 por 4, o quociente e o resto são $q = 11$ e $r = 2$, pois 46=4x11+2.

5.4. MÁXIMO DIVISOR COMUM

Dados dois números inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.

A definição a seguir, é a definição dada por Euclides nos Elementos e constitui-se num dos pilares de sua aritmética.

Definição: Um número inteiro $d \geq 0$ é um *máximo divisor comum* (mdc) de a e b, se possuir as seguintes propriedades:

i) d é um divisor comum de a e b.

ii) d é divisível por todo divisor comum de a e b.

Podemos reescrever a propriedade ii) como:

ii') Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$.

Isto implica que, se d e d' são dois mdc de um mesmo par de números, então, $d|d'$ e $d'|d$, o que, juntamente com as condições $d \geq 0$ e $d' \geq 0$, implicam que $d = d'$. Isto é, o máximo divisor comum de dois números, quando existe, é único.

OBSERVAÇÕES:

1. Denotaremos o máximo divisor comum de a e b, como (a, b).

2. A ordem em que a e b são tomados, não importa, portanto temos que:

$$(a, b) = (b, a)$$

3. Existem alguns casos particulares, onde é fácil verificar a existência do máximo divisor comum entre dois números inteiros. Por exemplo, se a é um número inteiro, tem-se que $(0, a) = |a|$, $(1, a) = 1$ e que $(a, a) = |a|$.

4. Temos, ainda, que, para todo $b \in \mathbb{Z}$.

$$a|b \Leftrightarrow (a, b) = |a|.$$

De fato, se $a|b$, temos que $|a|$ é um divisor comum de a e b e se c é um divisor comum de a e b, então c divide $|a|$, o que mostra que $|a| = (a, b)$.

Reciprocamente , temos que se $(a, b) = |a|$, segue que $|a|$ divide b, logo $a|b$.

5. Como todo número inteiro divide 0, o máximo divisor comum de a e b, onde $a = b = 0$ é 0, pois esse é um divisor comum de a e b e é o único divisível por todos os divisores de 0. Reciprocamente, se o máximo divisor comum de a e b é 0, então $0|a$ e $0|b$, mas o único número divisível por 0 é o próprio 0, portanto $a = b = 0$.

A demonstração da existência do máximo divisor comum de quaisquer dois números inteiros, sendo ambos não nulos, é facilmente percebido, como demonstramos abaixo.

5.5. ALGORITMO DE EUCLIDES

Podemos calcular o máximo divisor comum entre dois ou mais números inteiros, através da decomposição em fatores primos, porém nem sempre trataremos com números pequenos. E como podemos calcular quando tratarmos com números inteiros muito grandes?

Trazemos, aqui, a prova construtiva da existência do máximo divisor comum dada por Euclides em sua obra *Os Elementos* (Livro VII, Proposição 2):

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, podemos supor $b \leq a$. Se $b = 1$ ou $b = a$, ou ainda $b|a$, já vimos que $(a, b) = a$. Suponhamos, então. que $1 < b < a$ e que b não divide a. Logo, pela divisão euclidiana, podemos escrever

$$a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b.$$

Assim, temos duas possibilidades:

i) $r_1|b \rightarrow r_1 = (b, r_1)$ e, pelo Lema 3.4.2, temos que

$$r_1 = (b, r_1) = (b, a - q_1 b) = (b, a) = (a, b).$$

Então, termina o algoritmo.

ii) $r_1 \nmid b \rightarrow$ podemos, então efetuar a divisão de b por r_1, onde obtemos

$$b = r_1\, q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1.$$

Neste caso, teremos, novamente duas possibilidades:

i') $r_2 \mid r_1 \rightarrow r_2 = (r_1, r_1)$ e, novamente pelo Lema 3.4.2, temos

$$r_2 = (r_1, r_2) = (r_1, b - q_2\, r_1) = (r_1, b) = (a - q_1\, b, \text{b}) = (a, b)$$

E terminamos, então, o algoritmo.

ii') $r_2 \nmid r_1 \rightarrow$ podemos efetuar a divisão de r_1 por r_2, obtendo

$$r_1 = r_2\, q_2 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2.$$

Continuamos esse procedimento até que pare, o que sempre ocorrerá, caso contrário, teríamos uma sequência de números naturais $b > r_1 > r_2 > \ldots$ que não possui elemento mínimo, o que não é possível pelo *Princípio da Boa Ordem*. Portanto, para algum n, temos que

$$r_n \mid r_{n-1}, \text{ o que implica que } (a, b) = r_n.$$

O algoritmo acima descrito, pode ser realizado na prática, como mostramos a seguir:

Primeiramente efetuamos a divisão a = bq_1 + r_1 e colocamos os números envolvidos no diagrama abaixo:

	q_1
a	b
r_1	

A seguir, continuamos efetuando a divisão b = $r_1\, q_2 + r_2$ e colocamos os números envolvidos no diagrama:

	q_1	q_2
a	b	r_1
r_1	r_2	

Prosseguindo, enquanto for possível, teremos:

	q_1	q_2	q_3	…	q_{n-1}	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	…	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n=(a,b)
r_1	r_2	r_3	r_4	…	r_n		

Exemplo: Calculemos o máximo divisor comum de 372 e 162

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	6
48	18	12	6		

Observe que, no exemplo acima, o Algoritmo de Euclides nos fornece:

$$6 = 18 - 1 \times 12.$$

$$12 = 48 - 2 \times 18.$$

$$18 = 162 - 3 \times 48.$$

$$48 = 372 - 2 \times 162.$$

Segue, então, que:

$6 = 18 - 1 \times 12 = 18 - 1 \times (48 - 2 \times 18) = 3 \times 18 - 48 = 3\times(162 - 3 \times 48) - 48 =$

$3 \times 162 - 10 \times 48 = 3 \times 162 - 10 \times (372 - 2 \times 162) = 23 \times 162 - 10 \times 372.$

Temos, portanto, que

$$(372, 162) = 6 = 23 \times 162 + (- 10) \times 372.$$

Note que, através do uso do Algoritmo de Euclides de trás para a frente, podemos escrever 6 = (372, 162) como múltiplo de 162 mais um múltiplo de 372.

Seguindo o procedimento detalhado no exemplo acima, vê-se que o Algoritmo de Euclides também nos fornece um meio de escrever o máximo divisor comum de dois números como a soma de múltiplos dos números em questão.

Quando utilizamos o Algoritmo de Euclides para expressar (a, b) na forma

$ma + nb$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, chamamos de Algoritmo de Euclides Estendido.

O método do Algoritmo de Euclides Estendido, será de grande utilidade na resolução das Equações Diofantinas, mas, no próximo capítulo veremos um outro método mais prático de determinar os inteiros m e n tais que

$$(a, b) = ma + nb.$$

6. EQUAÇÕES DIOFANTINAS

Os problemas de indeterminação linear com duas ou mais incógnitas, pertencentes à Teoria dos Números, estão cada vez mais atuais, tanto no currículo escolar como em nosso cotidiano. Neste capítulo, trazemos as Equações Diofantinas, que tratam exatamente de como resolver esses problemas de maneira simples e rápida. Sendo possível encontrar suas soluções por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e também por àqueles denominados "leigos" no conteúdo, mas que as encontram e solucionam em seu dia-a-dia.

Definição: Equações Diofantinas são equações polinomiais, em várias incógnitas, com coeficientes inteiros (ou racionais) das quais se buscam soluções restritas ao conjunto dos números inteiros, ou seja, são equações do tipo

$$\boldsymbol{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,}$$

onde *f* é uma função *n*-variável com $n \geq 2$ e coeficientes inteiros.

As soluções dessas equações são as n-uplas (a_1 , a_2, ... , a_n), em que $a_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq n$.

As Equações Diofantinas podem ser Infinitas, Lineares com duas ou mais incógnitas, Não-Lineares ou Exponenciais.

Nosso trabalho se restringirá as Equações Diofantinas Lineares com duas incógnitas.

Métodos Fundamentais para a resolução das Equações Diofantinas

Existem vários métodos para a resolução dessas equações, aqui listamos alguns:

1. Método da Fatoração
2. Utilizando Inequações
3. Método Paramétrico
4. Método Aritmético Modular
5. Método de Indução Matemática
6. Método do Descenso de Fermat

Como nesse trabalho nosso foco é trabalhar com as Equações Lineares com Duas Incógnitas, apresentaremos apenas, o Método da Fatoração para a resolução dessas equações, porém achamos de grande utilidade relacionar os outros métodos para o caso de quem venha a ter conhecimento desse trabalho, saiba das outras possibilidades de encontrar as soluções das equações em questão.

Ao nos depararmos com uma Equação Diofantina, algumas dúvidas podem surgir, como:

a) Essa equação possui solução?
b) No caso afirmativo, essa solução é finita ou infinita, isto é, existe apenas uma solução ou várias soluções para a mesma equação?

As respostas para estas perguntas serão apresentadas a seguir, e, como demonstraremos, são relativamente fáceis utilizando apenas dois teoremas, que também serão explicitados abaixo.

Equações Diofantinas Lineares

A resolução de vários problemas em Teoria dos Números que exigem soluções inteiras recai, em várias situações, em equações do tipo

$$ax + by = c, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Essas equações são chamadas *Equações Diofantinas Lineares*.

Essas equações nem sempre apresentarão soluções, como por exemplo:

$$4X + 6Y = 3.$$

Observe que, a equação acima não possui nenhuma solução x_0, y_0 nos números inteiros pois, caso contrário, teríamos $4x_0 + 6\,y_0$ par e, portanto, nunca igual a 3.

É normal perguntarmos, então em que condições tal equação possui solução, e, caso exista, como determiná-la? As respostas serão dadas nos teoremas abaixo.

Teorema: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com a e b não ambos nulos e seja $d = (a, b)$. A Equação Diofantina Linear $ax + by = c$ tem solução em $\mathbb{Z}$ se, e somente se, d divide c.

Demonstração:
Suponhamos que a equação $ax + by = c$ admite solução. Queremos mostrar que (a,b) divide c.
Seja $d = (a,b)$, então deve existir (x_0 , y_0) tais que $ax_0 + b\,y_0 = c$. Como $d \mid a$ e $d \mid b$, temos que d divide qualquer combinação linear formada pelos inteiros a e b, ou seja, $d \mid ax_0$ e $d \mid by_0$. Portanto, $d \mid (ax_0 + by_0)$, ou seja, $d \mid c$.

Reciprocamente vamos supor que $d = (a,b)$ divide c e queremos mostrar que a equação $ax + by = c$ admite solução.
Seja $d = (a,b)$, então existe um par de inteiros (x_0, y_0) que satisfaz a igualdade

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Se $d = (a,b)$, existem s e $t \in \mathbb{Z}$ tais que $d = sa + tb$. Por hipótese, existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $c = dk$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade $d = sa + tb$ por k, obtemos $dk = k(as + tb)$, ou seja, $c= (ks)a + (kt)b$. Assim, encontramos $x_0 = ks$ e $y_0 = kt$ tal que $ax_0 + by_0 = c$.

Portanto a Equação Diofantina tem solução.

□

Teorema: Sejam $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$ e $d = (a, b)$. Se $d \nmid c$, então a equação $ax + by = c$ não tem solução inteira. Se $d | c$ a equação possui infinitas soluções e se $x = x_0$ e $y = y_0$ é uma solução particular, então todas as soluções são dadas por:

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) k$$

$$y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) k .$$

Demonstração: Se $d|c$, então a equação não possui solução pois, como $d|a$ e $d|b$, d deveria dividir c, uma vez que c é uma combinação linear de a e b. Suponhamos, portanto, que $d|c$. Pelo Teorema do Algoritmo de Euclides Estendido, existem inteiros m_0 e n_0 , tais que

$$a\, m_0 + b\, n_0 = d.$$

Como $d|c$, existe um inteiro k tal que $c = kd$.

Multiplicando $a(m_0)+ b(n_0)= d$ por k, teremos $a(m_0k) + b(n_0k) = kd = c$. Isto nos diz que o par ordenado (x_0, y_0) com $x_0 = m_0k$ e $y_0 = n_0k$ é uma solução de $ax + by = c$.

Vamos verificar que os pares ordenados da forma

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) k \quad \text{e}$$

$$y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) k ,$$

são soluções de $ax + by = c.$

De fato,

$$\begin{aligned} ax + by &= a \left(x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) k \right) + b \left(y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) k \right) \\ &= a\, x_0 + \frac{ab}{d} + b\, y_0 - \frac{ab}{d} \\ &= a\, x_0 + b\, y_0 = c . \end{aligned}$$

Então, mostramos que conhecida uma solução particular dada pelo par ordenado (x_0 , y_0) podemos, a partir dela, gerar infinitas soluções. Resta-nos mostrar que toda solução da equação $ax + by = c$ é da forma

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) k \;\; \text{e} \;\; y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) k .$$

Suponhamos que o par ordenado (x, y) seja uma solução, isto é, $ax + by = c$. Mas como

$$a\, x_0 + b\, y_0 = c ,$$

obtemos, subtraindo membro a membro, que

$$ax + by - ax_0 - by_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

o que acarreta $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$. Como $d = (a, b)$, segue que:

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

Portanto, dividindo os membros de $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ por d, teremos

$$\frac{a}{d}(x - x_0) = \frac{b}{d}(y_0 - y).$$

Logo, pela Proposicão 3.2, $\left(\frac{b}{d}\right) \mid (x - x_0)$. Portanto existe um inteiro k tal que

$$x - x_0 = k\left(\frac{b}{d}\right).$$

Substituindo esse valor na equação acima, temos que

$$y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) k,$$

o que complementa nossa demonstração.

□

Vejamos alguns exemplos de Equações Diofantinas e suas resoluções.

Exemplo: Resolva a equação $24x + 14y = 18$.

Solução: Primeiramente devemos verificar se essa equação tem solução.

Como $(24,14) = 2 \mid 18$, temos que a equação diofantina admite solução em $\mathbb{Z}$. Dividindo ambos os membros da equação por $2 = (24, 14)$, obtemos a equação equivalente $12x + 7y = 9$

Vamos calcular o máximo divisor comum utilizando o Algorítmo de Euclides:

	1	1	2	
12	7	5	2	1
5	2	1		

Como já vimos, essa equação admite solução. Vamos determinar a solução particular x_0 , y_0 . Pelo Algorítmo de Euclides Estendido, temos:

12 = 7 x 1 + 5
7 = 5 x 1 + 2
5 = 2 x 2 + 1.

Substituindo as equações acima, uma nas outras, obtemos:

1 = 12 x 3 – 7 x 5.

Portanto

9= 12 x 27 + 7x (-45).

Logo, x_0 = 27 e y_0 = - 45 é a solução particular da equação.

Consequentemente, a solução geral é:

x= 27 + 7 *t*

y= -45 – 12 *t* , com *t* ∈ ℤ.

Exemplo: Resolva a equação 5*x* + 12*y* = 81.

Solução: Iniciamos calculando (12, 5), utilizando o Algoritmo de Euclides, para saber se a equação possui solução. Então,

12 = 5 x (2) + 2
5 = 2 x (2) + 1
2 = 1 x (2) + 0.

Logo, (12, 5) = 1. Portanto a equação possui solução.

Isolando-se os restos das duas primeiras equações, temos:

2 = 12 + 5 x (-2) (i)
1 = 5 x (-1) + 2 x (-2) . (ii)

Substituindo (i) em (ii), obtemos:

= 5 x (1) + (5 x (-2) + 12) x (-2)
= 5 x (5) + 12 x (-2) . (iii)

Multiplicando (iii) por 81, temos:

$$81 = 5 \text{ x } (405) + 12 \text{ x } (-162).$$

Logo, temos x_0 = 405 e y_0 = - 162, o que nos dá a solução particular da equação, ou seja, o par ordenado (405 , -162).

Assim, a solução geral será dada por:

$$x = 405 + 12\,t$$

$$y = -162 - 5t \text{ , com } t \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo: Suponha que você dispõe de uma quantia de R$ 1.000,00 para ser gasto em roupas. Sabendo que toda quantia deve ser gasta, qual a maior quantidade de calças e camisas você pode comprar sabendo que cada calça custa R$ 172,00 e cada camisa custa R$ 120,00?

Solução: Coletando os dados do problema, obtemos a seguinte equação:

$$172\,x + 120\,y = 1000.$$

Para sabermos se a equação tem solução, vamos calcular (172, 120)

	1	2	3	4
172	120	52	16	4
152	16	4	0	

Logo, (172, 120) = 4 e, como 4 | 1000, a equação tem solução.

Aplicando a Divisão Euclidiana, temos:

$$\begin{aligned}
172 &= 120 \text{ x } 1 + 5 \rightarrow 52 = 172 - 120 \text{ x } 1\\
120 &= 52 \text{ x } 2 + 16 \rightarrow 16 = 120 - 52 \text{ x } 2\\
52 &= 16 \text{ x } 3 + 4 \rightarrow 4 = 52 - 16 \text{ x } 3\\
4 &= 52 - 16 \text{ x } 3 = 52 - (120 - 52 \text{ x } 2) \text{ x } 3\\
&= 52 - 120 \text{ x } 3 + 52 \text{ x } 6\\
&= -120 \text{ x } 3 + 52 \text{ x } 7\\
&= -120 \text{ x } 3 + (172 - 120) \text{ x } 7\\
&= -120 \text{ x } 3 + 172 \text{ x } 7 - 120 - 7\\
&= 172 \text{ x } 7 - 120 \text{ x } 10\\
&= 172 \text{ x } 7 + 120\text{x } (-10).
\end{aligned}$$

Assim,

$$172 \text{ x } 7 + 120 \text{ x } (-10) = 4.$$

Logo,

$$172 \times 1750 + 120 \times (-2500) = 1000.$$

Portanto, temos x_0 = 1.750 e y_0 = - 2.500 , o que nos dá a solução particular

(1750, 2500).

Obtemos, então, como solução geral

$$S = \{(1750 - 30\,t, -2500 + 43\,t) : t \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe que, nosso problema pede que determine a quantidade de calças e camisas que poderão ser compradas com o valor possuído. Porém, note que:

$$x_0 = 1750 - 30\,t \geq 0,$$
$$y_0 = -2500 - 43\,t \geq 0.$$

Então,

$$t \leq \frac{-1750}{-30} \Rightarrow \ t \leq \frac{175}{3} = 58{,}33,$$

$$\text{e,} \quad t \leq \frac{2500}{43} = 58{,}13953.$$

Logo,

$$58{,}13 \leq t \leq 58{,}33.$$

Portanto, não existe $t \in \mathbb{Z}_+$ tal que ele consiga comprar apenas calças e camisas.

No próximo capítulo, trazemos uma proposta de atividades envolvendo as Equações Diofantinas, com aplicação nos anos finais do Ensino Fundamental.

7. ATIVIDADES PROPOSTAS

As atividades aqui propostas, apresentam diversas metodologias de resoluções, provocando os educandos à investigação e a pesquisa por meio de situações-problemas contextualizados, tornando-os instigadores e curiosos, levando-os à desenvolver seu raciocínio lógico, suas interpretações e análises de problemas antes vistos apenas numericamente, estimulando o prazer de estudar matemática.

OBJETIVO GERAL:

Introduzir o estudo de Equações Diofantinas no Ensino Fundamental.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Utilizar as Equações Diofantinas como ferramenta para a resolução de equações com duas variáveis.

Desenvolver o raciocínio lógico e o espírito de investigação através de situações-problemas contextualizados à realidade da escola e seus educandos.

PÚBLICO ALVO:

As atividades foram pensadas para serem aplicadas a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola da rede pública, na cidade de Rio Grande – RS.

Escolhemos trabalhar com os alunos do 9º ano, por já estarem com os conhecimentos de todos pré-requisitos necessários para a compreensão do conteúdo que será trabalhado.

RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS:

A proposta das atividades foram pensadas para serem aplicadas em três encontros com duração de 50 minutos cada.

MATERIAL NECESSÁRIO:

Computador ou celular, com acesso à internet, papel, caneta, lápis.

PRÉ-REQUISITOS:

Os pré-requisitos necessários para a realização das atividades são:

1. Cálculo do Máximo Divisor Comum – MDC
2. Equações de Primeiro Grau
3. Solução de sistemas com duas equações lineares com duas variáveis

Apresentamos, a seguir, as atividades propostas:

ATIVIDADE 1:

Num primeiro momento, aconselhamos uma breve revisão de conteúdos considerados pré-requisitos para o aprendizado de Equações Diofantinas, com exercícios de máximo divisor comum, equações de primeiro grau e sistemas de equações de primeiro grau com duas variáveis. Para tanto, trazemos alguns exemplos de exercícios a serem aplicados aos educandos.

Problema 1. Para o desfile escolar, foram doados tecidos para a confecção de faixas comemorativas, com medidas de 240cm e 360cm. Sabendo-se que os tecidos deverão ser cortados em partes iguais, sem perda alguma de material e maiores possíveis, qual será o comprimento de cada faixa?

Solução: Aplicando-se o Algoritmo de Euclides.

Utilizando as propriedades listadas nos capítulos anteriores, podemos reescrever como (24, 36).
Assim,

	1	2
36	24	12
12	0	

Portanto, encontramos que o máximo divisor comum entre (36, 24)= 12.

Considerando que as unidades métricas utilizadas no exercício são centímetros, a resposta correta é 120cm.

Problema 2. Numa gincana interséries na escola, a equipe A, do 6º ano, fez 48 pontos a menos que a equipe B, do 5º ano. Sabendo que as duas equipes somaram 172 pontos no total, quantos pontos fez a equipe A?

Solução: Temos, agora, uma equação de primeiro grau a ser resolvida, devemos colher os dados no enunciado do problema e ‘montar’ nossa equação.

Sabemos que a equipe A fez 48 pontos a menos que a equipe B, e as duas equipes somaram 172 pontos no total. Como não sabemos a quantidade de pontos feitos pela equipe B, chamaremos esse número de x. Montando nossa equação, teremos:

$$A \rightarrow x - 48$$
$$B \rightarrow x$$

Das duas implicações anteriores e como as duas equipes somaram 172 pontos temos:

$$2x - 48 = 172.$$

Isolando-se o x:

$$2x = 172 + 48$$
$$2x = 220$$
$$x = 220 \div 2$$
$$x = 110.$$

Concluímos que a equipe B fez 110 pontos. Porém queremos saber quantos pontos fez a equipe A. Para acharmos esse resultado, basta fazermos a subtração dos pontos da equipe B pelos pontos da equipe A. Logo:

$$B = 110 \text{ pontos} \Longrightarrow A = 110 - 48.$$
$$A = 62 \text{ pontos}.$$

Problema 3. Nas Olimpíadas de Matemática, os alunos do Nível I e do Nível II fizeram um desafio para saber qual dos níveis alcançariam um melhor desempenho na prova. Em busca de melhores resultados, os alunos formaram grupos de estudos e usaram a biblioteca da escola em dias alternados para se prepararem, sendo que o grupo formado pelos alunos do Nível I, estudou segundas e quartas, e o grupo dos alunos do Nível II, estudou as terças e quintas, sempre em horários inversos às suas aulas. Considerando que o total de questões resolvidas pelos dois grupos foi de 40 questões e, sabendo que o grupo do Nível II resolveu 2 questões a mais que o grupo do Nível I, determine o número de questões resolvidas por cada grupo.

Solução: O presente exercício nos traz um sistema de equações de primeiro grau, sendo que, para resolvê-lo, os alunos deverão identificar os dados no enunciado, montar as equações e, então demonstrar o sistema e resolvê-lo.

Identificaremos os grupos como:

Nível I $\rightarrow$ chamaremos de x.
Nível II $\rightarrow$ chamaremos de y.

Temos ainda que, o grupo do nível II resolveu 2 questões a mais que o grupo do nível I, e também que, o total de questões resolvidas pelos dois grupos foi de 40 questões.

Com esses dados, podemos, então, identificar nosso sistema como:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = x + 2. \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ -x + y = 2. \end{cases}$$

Utilizando o artifício da adição, teremos:

$$\begin{cases} x + y = 40. \\ -x + y = 2. \end{cases}$$

$$2y = 42$$
$$y = 42 \div 2$$
$$y = 21.$$

Encontrado o valor de *y*, precisamos encontrar, agora, o valor de *x*:

Substituindo-se o valor de *y* na primeira equação, temos:

$$x+21=40$$

$$x=40-21$$

$$x=19.$$

Assim, temos a solução de nosso sistema, ou seja, $x=19$ e $y=21$.

Utilizando-se os valores de *x* e *y* encontrados, concluímos que:

O grupo do Nível I resolveu 19 questões e o grupo do Nível II resolveu 21 questões.

Chegamos, portanto, a solução de nosso problema.

ATIVIDADE 2:

Num segundo momento, trazemos a apresentação da definição formal de Equações Diofantinas.

Observe a seguinte equação

$$28x + 90y = 22.$$

Temos uma Equação Diofantina do tipo $ax+by=c$, onde $a=28$, $b=90$ e $c=22$ e *x, y* as variáveis a serem encontradas, que serão a solução da equação.

Uma Equação Diofantina terá solução se, e somente se, (a,b) dividir c.

Vamos verificar se a equação dada tem solução utilizando o Algoritmo de Euclides para determinarmos (90,28). Então:

	3	4	1	2
90	28	6	4	2
6	4	2	0	

Fazendo 90÷28, temos como quociente 3 e resto 6.
Prosseguindo com as divisões, teremos:

28÷6, quociente 4 e resto 4,
6÷4, quociente 1 e resto 2,
4÷2, quociente 2 e resto 0.

Concluímos que (90,28)=2 e 2|22, logo a equação tem solução.

Dizemos que a Equação Diofantina tem solução no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, se existir x_0, y_0 $\in \mathbb{Z}$ tais que:

$$ax_0 + by_0=c,$$

e o par ordenado (x_0,y_0) á chamado de solução da equação.

Utilizando o Algoritmo de Euclides Estendido, vamos determinar x_0 e y_0. Temos então que

2=6-1x4
4=28-4x6
6=90-3x28

E segue que,

2=6-1x(28-4x6)= (-1)x28+5x6= (-1)x28+5x(90-3x28)=(-16)x28+5x90

Logo, 2= (-16)x28+ 5x90

Multiplicando ambos os membros desse igualdade por 11, temos:

22= (-176)x28+55x99

Assim encontramos x_0= -176 e y_0= 55, que nos resulta no par ordenado (-176,55) o qual representa uma solução particular da equação dada.

Quando temos *a* e *b* números primos entre si, a equação possui solução para qualquer número inteiro *c*.

Sugerimos um exemplo a ser resolvido utilizando a ideia de plano cartesiano, ou seja, os alunos deverão encontrar valores para '*x*' e '*y*', que serão pares ordenados, que satisfaçam a equação e marcá-los no plano cartesiano. Na reta obtida teremos os pontos que solucionam o exemplo apresentado. Justificamos esse método para a resolução da Equação Diofantina apresentada neste exemplo devido ao fato de algumas dessas equações terem soluções limitadas, conforme o problema que for proposto, e as soluções serem encontradas através da tentativa e erro, como ocorre no problema aqui exposto.

Problema 4: Em um evento de matemática da escola, há 120 participantes. Para realizar uma dinâmica, a comissão organizadora do evento deseja separar os participantes em grupos de 6 e 12 pessoas. Quantos grupos de 6 pessoas e 12 pessoas será possível montar de modo que todos participem da dinâmica?

Solução: Coletando os dados apresentados no problema, chegamos a uma Equação Diofantina com duas variáveis, ou seja:

$$6x+12y=120.$$

Essa equação pode ser representada no plano cartesiano através dos pares ordenados contidos na reta $y = \frac{120-6x}{12}$ simplificando a equação, teremos:

$$y = \frac{20-x}{2} \quad \text{com } 0 \leq x \leq 20,$$

pois queremos encontrar soluções inteiras e positivas para a equação.

Assim, atribuindo-se valores para *x*, encontramos o valor de *y*, formando nossos pares ordenados, observando, porém, que *x* deve ser múltiplo de 2 para que a equação tenha as soluções que desejamos. Então:

$$\text{quando } x= 0 \rightarrow y= \frac{20-0}{2} \rightarrow y= 10 \Rightarrow A= (0,10)$$

$$\text{quando } x= 2 \rightarrow y= \frac{20-2}{2} \rightarrow y= 9 \Rightarrow B= (2,9)$$

$$\text{quando } x= 4 \rightarrow y= \frac{20-4}{2} \rightarrow y= 8 \Rightarrow C= (4,8)$$

$$\text{quando } x= 6 \rightarrow y= \frac{20-6}{2} \rightarrow y= 7 \Rightarrow D= (6,7)$$

$$\text{quando } x= 8 \rightarrow y= \frac{20-8}{2} \rightarrow y= 6 \Rightarrow E= (8,6)$$

$$\text{quando } x= 10 \rightarrow y= \frac{20-10}{2} \rightarrow y= 5 \Rightarrow F= (10,5)$$

$$\text{quando } x= 12 \rightarrow y= \frac{20-12}{2} \rightarrow y=4 \Rightarrow G= (12,4)$$

$$\text{quando } x= 14 \rightarrow y= \frac{20-14}{2} \rightarrow y= 3 \Rightarrow H= (14, 3)$$

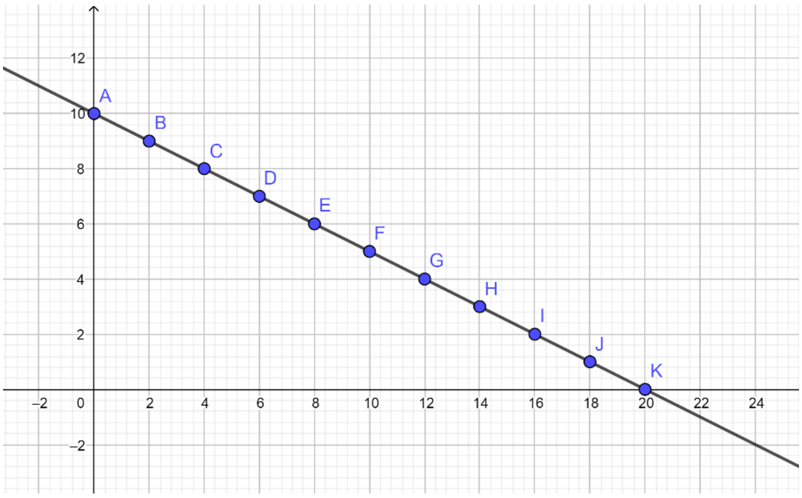
quando x= 16 ⟶ y= $\frac{20-16}{2}$⟶ y= 2 ⇒ I= (16,2)

quando x= 18 ⟶ y= $\frac{20-18}{2}$⟶ y= 1 ⇒ J= (18,1)

quando x= 20 ⟶ y= $\frac{20-20}{2}$⟶ y= 0 ⇒ K= (20,0)

Portanto, encontramos 11 pares ordenados que satisfazem a equação. Resta-nos, agora, colocá-los no plano cartesiano e, assim, encontrarmos a reta, a qual contém o conjunto discreto formado pelos pares ordenados que representam geometricamente a solução da Equação Diofantina apresentada.

Figura 3: Soluções inteiras e positivas da equação linear 6x + 12y = 120



Fonte: Autor

ATIVIDADE 3:

Num terceiro e último momento, trazemos mais dois exemplos de como solucionar as Equações Diofantinas, sendo que apresentamos métodos diferentes de solução. Enquanto num exemplo solucionamos a equação utilizando a aplicação de fórmula direta, num segundo trazemos uma solução mais ampla através do Algoritmo de Euclides, como veremos a seguir.

Problema 5. Para poder ir ao passeio da escola, Luiz guardou sua mesada para compra de seu lanche. Depois de pesquisar qual lanche levaria e quanto pagaria no total, Luiz optou pelos seguintes lanches:

Hamburguer R$4,00 cada.
Sanduíches R$6,00 cada.

Sabendo que Luiz dispunha de R$50,00, e que haveria divisão de lanches entre os colegas, de quantas maneiras ele pode comprar os lanches?

Solução: Considere x como a quantidade de hambúrguer e y como a quantidade de sanduíches. Temos que o valor unitário de cada hambúrguer é R$4,00 e de cada sanduíche é R$6,00, encontramos, então a seguinte equação:

$$4x+6y=50.$$

Dividindo-se a equação, de ambos os lados, por 2, temos:

$$2x+3y=25.$$

Como (2,3) =1 e 1|25, concluímos que a equação tem solução nos números inteiros.

Atribuindo-se valores para x e y, podemos resolver a equação. Considere x=2 e y=7:

$$2x+3y=25$$

$$2\text{x}2+3\text{x}7=25$$

$$4+21= 25.$$

Assim, encontramos uma solução particular para a equação apresentada, ou seja, (2,7).

Note que, podemos ter outras maneiras de resolver essa mesma equação, isto é, existem outros valores para x e y que também satisfazem a equação, o que chamamos de solução geral.

Para determinarmos as outras soluções da equação, observe o seguinte Teorema:

"Seja x_0 e y_0 uma solução particular de $ax+by=c$, em que $(a,b)=1$. Então as soluções da equação serão da forma:

$$x=x_0 + bt$$

$$y=y_0 - at \text{ , com } t \in \mathbb{Z}.$$

Observe que, da equação $2x+3y=25$, temos que $a=2$ e $b=3$.

Temos, também a solução particular encontrada, ou seja, (2,7).

Então, $x_0 = 2$ e $y_0 = 7$.

Aplicando-se o Teorema acima citado, teremos:

$$x = 2 + 3t$$

$$y = 7 - 2t.$$

Como já vimos, $t \in \mathbb{Z}$, portanto atribuiremos valores inteiros para "t" para solucionarmos as equações acima. Assim,

quando $t = 0 \rightarrow x = 2 + 3x0 \rightarrow x = 2$ e $y = 7 - 2x0 \rightarrow y = 7$.

quando $t = 1 \rightarrow x = 2 + 3x1 \rightarrow x = 5$ e $y = 7 - 2x1 \rightarrow y = 5$.

quando $t = 2 \rightarrow x = 2 + 3x2 \rightarrow x = 8$ e $y = 7 - 2x2 \rightarrow y = 3$.

quando $t = 3 \rightarrow x = 2 + 3x3 \rightarrow x = 11$ e $y = 7 - 2x3 \rightarrow y = 1$.

Encontramos, assim, quatro soluções para a mesma equação, ou seja:(2,7) , (5,5) , (8,3) , (11,1) são soluções da Equação Diofantina apresentada no exemplo.

Para verificarmos se as soluções encontradas são verdadeiras, basta substituirmos os valores dos pares ordenados na equação original como segue:

$$(2,7) \rightarrow 2x+3y=25 \rightarrow 2x2+ 3x7 = 25.$$

$$(5,5) \rightarrow 2x+3y=25 \rightarrow 2x5+ 3x5 = 25.$$

$$(8,3) \rightarrow 2x+3y=25 \rightarrow 2x8+ 3x3 = 25.$$

$$(11,1) \rightarrow 2x+3y=25 \rightarrow 2x11+ 3x1 = 25.$$

Concluímos, portanto, que as soluções (2,7) , (5,5) , (8,3) e (11,1) são soluções da equação. Salientamos que as soluções encontradas não são únicas, pois existem uma infinidade de pares ordenados que também são soluções da equação, basta apenas variar o t.

Problema 6. Para o retorno às aulas, a mãe de Maíra, comprou cadernos e jogos de canetas para sua filha. Cada caderno escolhido por Maíra custa R$12,00 e os jogos de canetas R$8,00. Com R$ 80,00, quais as possíveis quantidades de cadernos e jogos de canetas que ela poderá comprar, sabendo que irá comprar no mínimo 2 cadernos e 3 jogos de canetas?

Solução: Temos uma Equação Diofantina $12L+8C=80$, onde L representa a quantidade de jogos de canetas e C a quantidade de cadernos que a mãe de Maíra poderá comprar.

Utilizando-se o Algoritmo de Euclides, temos:

	1	2
12	8	4
4	0	

Logo, 4= 12- 8x1.

Assim, pelo Algoritmo de Euclides, temos que (12,8) = 4, e como $4|80$, a equação tem solução.

Então:

$$4= 12 \text{ x } 1 + 8\text{x } (-1) \text{ x } 20.$$

$$80= 12 \text{ x}(20) + 8\text{x}(-20).$$

Portanto a solução geral é dada por:

$$L= 20 + \frac{8}{4}t \rightarrow L= 20 + 2t.$$

$$C= -20 - \frac{12}{4}t \rightarrow L= -20 -3t \quad \text{, com } t \in \mathbb{Z}.$$

Observando-se as restrições do exemplo para calcular os possíveis valores de $t \in \mathbb{Z}$, teremos:

$$20 + 2t \geq 3 \quad \text{e} \quad -20-3t \geq 2.$$

$$2t \geq -17 \quad \text{e} \quad -3t \geq 22.$$

$$t \geq -8 \quad \text{e} \quad t \leq -8.$$

Portanto, o único valor que satisfaz as duas equações é t= -8.

Se t= -8, temos que:

$$L= 20 + 2\text{x } (-8)= 4.$$

$$C= -20 – 3\text{x } (-8)= 4.$$

Logo, concluímos que a mãe de Maíra poderá comprar 4 cadernos e 4 jogos de canetas com os R$80,00 que possui.

RESULTADOS ESPERADOS:

Esperamos, com a aplicação das atividades propostas que, ao final, os alunos sejam capazes de resolver situações-problemas utilizando o raciocínio lógico para a interpretação dos mesmos somados aos seus conhecimentos matemáticos, chegando as devidas soluções. Também é esperado que, reconheçam as Equações Diofantinas em conteúdos já estudados anteriormente, e, principalmente desenvolvam suas capacidades de identificar, formular, analisar e resolver problemas que envolvam Equações Diofantinas, assim consolidando, ampliando e aprofundando seus aprendizados desenvolvidos até o momento.

Ao final da aplicação dessas atividades, pretendemos mostrar que as equações diofantinas já são estudadas nas séries finais do ensino fundamental e também no ensino médio, e portanto podem ser incluídas no currículo sem acréscimo de conteúdos, pois todos pré-requisitos necessários para seu estudo já fazem parte do estudo curricular, conforme BNCC.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das Equações Diofantinas é um conteúdo amplo e desafiador. Originada dos estudos de Diofanthus, algebrista grego, são equações normalmente solucionadas no conjunto dos números inteiros, que abrangem, quase que em sua totalidade, a Teoria dos Números. Pode-se dizer que, a principal aplicação do máximo divisor comum está na solução das Equações Diofantinas.

Salientamos seu estudo, mesmo que anonimamente, a partir das séries finais do Ensino Fundamental, onde são estudadas através de jogos de quebra-cabeças, problemas relacionados à divisibilidade, números primos, sistemas lineares, entre tantas outras formas com que são introduzidas nos currículos regulares do ensino básico.

Apresentar a possibilidade de incluir as Equações Diofantinas, sua definição e aplicações, no ensino básico, é, tão somente, explicitar um conteúdo já conhecido pelos educandos. Tratando-se, apenas, de dar a referida importância a um conteúdo tão relevante da álgebra matemática.

Por outro lado, consideramos que o estudo das Equações Diofantinas provocam os educandos à investigação e a pesquisa por meio de situações-problemas contextualizados, tornando-os instigadores e curiosos, levando-os à desenvolver seu raciocínio lógico, suas interpretações e análises de problemas antes vistos apenas numericamente, estimulando o prazer de estudar matemática.

Cabe salientar, que em relação as atividades propostas, devido ao momento atual, em que passamos por uma pandemia mundial, além de termos todas atividades presenciais suspensas, a incompatibilidade do calendário letivo da escola na qual seriam aplicadas as atividades e o calendário emergencial da Universidade Federal do Rio Grande – FURG, fez com que a mesma fosse impraticável, porém deixamos a possibilidade de aplicá-la em um outro momento, quando estivermos com todas atividades escolares normalizadas.

REFERÊNCIAS

[1] Boyer,Carl B., *História da Matemática,* Ed. Edgard Blucher Ltda, (1996).

[2] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base*. Brasília, 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em 09/02/2022 às 19:45h.

[3] Duarte, José Roberto – *Equações Diofantinas associadas a Funções Aritméticas* – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – Rio Claro, 2020 - http://hdl.handle.net/11449/194411.- Acesso em 23/02/2021 às 20:24h.

[4] Eves, Howard, *Introdução à História da Matemática*, Ed. Da UNICAMP, São Paulo (1997).

[5] Hefez, Abramo, *Elementos de Aritmética*, SBM, RJ (2016).

[6] Millies, Francisco César Polcino, Coelho,Sônia Pitta, *Números: Uma Introdução á Matemática*, Ed. da Universidade de São Paulo (2003).

[7] Ribeiro Rildo, *Equações Diofantinas: uma abordagem para o Ensino Médio* – Universidade de Brasília – PROFMAT, 2014. Disponível em:< https://repositorio.unb.br/handle/10482/17328 > Acesso em 28/01/2021 às 20:28h.

[8] Savóis, Josias Neubert – *Método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais* – Universidade Federal do Rio Grande-FURG – PROFMAT, 2014. Disponível em: < https://profmat.furg.br/dissertacoes-e-teses>. Acesso em 12/04/2021 às 19:31h.

[9] Souza, Romário Sidrone de – *Equações diofantinas lineares, quadráticas e aplicações* – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Rio Claro, 2017.Ciências Exatas – Rio Claro, 2017. Disponível em: < http:/hdl.handle.net/11449/149949>. Acesso em 12/04/2021 às 20:52h.